***CHUYÊN ĐỀ :CÁC PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ***

**\*Phương pháp 1: Đặt nhân tử chung**

Sử dụng tính chất : A.B + A.C = A ( B + C).

*Cách làm:*

+ Tìm nhân tử chung của các hệ số (ƯCLN của các hệ số).

+ Tìm nhân tử chung của các biến (lấy với số mũ nhỏ nhất).

+ Nhiều khi để làm xuất hiện nhân tử chung ta cần đổi dấu các hạng tử.

***VD1:*** Phân tích đa thức 15x2y – 20 xy2 + 10 x2y2 thành nhân tử.

***Giải:*** 15x2y – 20 xy2 + 10 x2y2 = 5xy. 3x – 5xy. 4y + 5xy. 2xy

= 5xy. (3x – 4y + 2xy).

***VD2:*** Phân tích đa thức 20x( x – y) – 6y( y – x) thành nhân tử.

***Giải:*** 20x( x – y) – 6y( y – x)= 20x( x – y) + 6y( x – y)

= 2( x – y).10x + 2( x – y).3y

= 2( x – y)( 10x + 3y).

***VD3:*** Phân tích đa thức 6x( x – y) – 17( y – x)2 thành nhân tử.

*Cách giải* : 6x( x – y) – 17( y – x)2 = 6x( x – y) - 17( x - y)2

= ( x – y) [6x - 17( x – y)] = ( x – y)(17y – 11x).

**LƯU Ý :**Qua các ví dụ trên giáo viên củng cố các kiến thức cơ bản cho học sinh:

- Cách tìm nhân tử chung của các hạng tử.

- Quy tắc đổi dấu và cách đổi dấu của các nhân tử trong một tích.

**\*Phương pháp 2: Dùng hằng đẳng thức**

***Học sinh cần nắm vững 7 hằng đẳng thức đáng nhớ sau:***

1.( A + B )2 = A2 + 2AB + B2

2.( A - B )2 = A2 - 2AB + B2

3.A2 - B2 = ( A + B )( A - B )

4.( A + B )3 = A3 + 3A2 B + 3AB2 + B3

5.( A - B )3 = A3 – 3A2B + 3AB2 - B3

6.A3 - B3 = ( A - B )( A2 + AB + B2)

7.A3 + B3 = ( A + B )( A2 - AB + B2)

***VD4:*** Phân tích đa thức ( x + y )2 – ( x – y )2 thành nhân tử.

Gv: Đa thức trên có dạng hằng đẳng thức nào? .Hs: Có dạng A2 - B2

*Cách giải* :

( x + y )2 – ( x – y )2 = [( x + y ) + ( x – y )].[( x + y ) - ( x – y )]

= ( x + y + x – y ).( x + y – x + y )

= 2x.2y = 4xy.

***VD5:*** Phân tích đa thức a6 – b6 thành nhân tử.

***Giải:*** a6 – b6 = ( a3 )2 – ( b3 )2

= ( a3 + b3 ) ( a3 - b3 )

= ( a + b )( a2 - ab + b2 )( a – b )( a2 + ab + b2 ).

**LƯU Ý :**Qua các ví dụ trên giáo viên củng cố các kiến thức cơ bản cho học sinh:

- Quy tắc dấu ngoặc.

- Kỹ năng nhận dạng hằng đẳng thức qua bài toán dựa vào các hạng tử, số mũ của các hạng tử để sử dụng hằng đẳng thức thích hợp, chính xác.

**\*Phương pháp 3: Nhóm các hạng tử**

Kết hợp nhiều hạng tử thích hợp của đa thức khi đa thức chưa có nhân tử chung hoặc chưa áp dụng được hằng đẳng thức.

*Cách làm:*

+ Phát hiện nhân tử chung hoặc hằng đẳng thức ở từng nhóm.

+ Nhóm để áp dụng phương pháp đặt nhân tử chung hoặc hằng đẳng thức.

+ Đặt nhân tử chung cho toàn đa thức.

***VD6:*** Phân tích đa thức 3x2 – 5xy + 3x – 5y thành nhân tử.

*Cách 1*: ( 3x2 – 5xy ) + ( 3x – 5y )

*Cách 2*: ( 3x2 +3 x ) - ( 5xy + 5y )

*Cách giải đúng*: 3x2 – 5xy + 3x – 5y = ( 3x2 – 5xy ) + ( 3x – 5y )

= x( 3x – 5y ) + 1.(3x –5 y )

= ( 3x –5y )( x + 1).

***VD7:*** Phân tích đa thức x2 – 6x + 9 – 4y2 thành nhân tử.

***Giải:*** x2 – 6x + 9 – 4y2 = (x2 – 6x + 9) – ( 2y )2

= ( x – 3 )2 – ( 2y )2

=( x – 3 + 2y ) ( x – 3 – 2y ).

**LƯU Ý :**Qua các ví dụ trên giáo viên củng cố các kiến thức cơ bản cho học sinh:

- Lựa chọn các hạng tử thích hợp để nhóm hạng tử.

- Kiểm tra lại cách đặt dấu khi thực hiện nhóm các hạng tử của đa thức.

**\*Phương pháp 4: Phối hợp các phương pháp**

***VD8:*** Phân tích đa thức x4 – 8x3 + x2 – 8x thành nhân tử.

Gv: Xét từng phương pháp

Hs: Thường mắc sai lầm là giải chưa hoàn chỉnh như sau:

° x4 – 8x3 + x2 – 8x = x(x3 – 8x2 + x – 8 )

° x4 – 8x3 + x2 – 8x = ( x4 – 8x3 ) + ( x2 – 8x)

= x3( x – 8 ) + x( x – 8 )

= ( x – 8 )( x3 + x )

*Cách giải đúng*: x4 – 8x3 + x2 – 8x = x( x3 – 8x2 + x – 8 )

= x[(x3 – 8x2 ) + ( x – 8 )]

= x[x2( x – 8 ) + 1. ( x – 8 )]

= x( x – 8 )(x2 + 1).

***VD9:*** Phân tích đa thức A =  thành nhân tử.

*Gợi ý*: áp dụng hằng đẳng thức:

( A + B )3 = A3 + 3A2 B + 3AB2 + B3

= A3+ B3 + 3AB( A + B)

 A3+ B3 = ( A + B )3 – 3AB( A + B)

***Giải:***

A =  = ( x + y )3 + z3– 3xy(x+y) – 3xyz

= [( x + y )3 + z3 ]- 3xy( x + y + z) )

= (x +y +z)[(x + y)2 -(x + y)z + z2 ] – 3xy( x+ y + z)

= (x + y +z)( x2 +2xy +y2 - xz - yz +z2- 3xy)

= (x + y +z)( x2 + y2 +z2- xz - yz - xy).

*Khai thác bài toán:*Cho x + y + z = 0. Chứng minh x3 + y3 + z3 = 3xyz

**\*Phương pháp 5: Tách hạng tử .**

Sử dụng cho các bài tập không thể áp dụng ngay được ba phương pháp cơ bản đã học để giải.

*Cách làm:*Tách một hạng tử thành nhiều hạng tử khác một cách thích hợp rồi áp dụng các phương pháp cơ bản để giải.

***Định lí bổ sung:***

+ Đa thức f(x) có nghiệm hữu tỉ thì có dạng p/q trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số cao nhất

+ Nếu f(x) có tổng các hệ số bằng 0 thì f(x) có một nhân tử là x – 1

+ Nếu f(x) có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì f(x) có một nhân tử là x + 1

***VD10:*** Phân tích đa thức f(x) = 3x2 – 8x + 4 thành nhân tử.

*Gợi ý*: Có nhiều cách phân tích.

***Giải:***

- Cách 1: Tách hạng tử 3x2

f(x) = 3x2 – 8x + 4

= 4x2 – 8x + 4 – x2

= ( 2x – 2 )2 – x2

= ( 2x – 2 + x )( 2x – 2 – x ) = ( 3x – 2 )( x – 2 )

- Cách 2: Tách hạng tử - 8x

f(x) = 3x2 – 8x + 4

= 3x2 – 6x – 2x + 4

= 3x( x – 2 ) – 2( x – 2 )

= ( x – 2 )( 3x – 2 )

- Cách 3: Tách hạng tử 4

f(x) = 3x2 – 8x + 4

= 3x2 – 12 – 8x + 16

= 3( x2 – 22 ) – 8( x – 2 )

= 3( x + 2 )( x – 2 ) – 8( x – 2 )

= ( x – 2 )( 3x + 6 – 8 )

= ( x – 2 )( 3x – 2 )

*Cách giải:* Như vậy trong đa thức bậc hai: ax2+bx+c hệ số b = b1+ b2 sao cho b1. b2 = a.c. Khi muốn tách hạng tử bậc nhất thành tổng 2 hạng tử làm như sau :

* *Tìm tích a.c*
* *Phân tích a.c ra thành tích hai thừa số nguyên bằng mọi cách*
* *Chọn hai thừa số mà tổng bằng b*

***VD12:*** Phân tích đa thức f(x) = 4x2 + 4x – 3 thành nhân tử.

+ a.c = 4.(-3)=(-3).4 = (-6).2= 6.(-2) = 12.(-1) = (-12).1

+ b = 4 = 6 + (-2)

***Giải:***f(x) = 4x2 + 4x – 3 = (4x2 + 6x ) - ( 2x +3 )

= 2x( 2x +3 ) - ( 2x +3 )

= ( 2x +3 )( 2x - 1 ).

**LƯU Ý :**Đối với đa thức từ bậc ba trở lên để làm xuất hiện các hệ số tỉ lệ, tuỳ theo đặc điểm của các hệ số mà vận dụng cách tách hạng tử cho phù hợp nhằm vận dụng được các phương pháp phân tích cơ bản đã học.

***VD13*:** Phân tích đa thức f(x)= x3 – x2 - 4 thành nhân tử.

Ta nhận thấy nghiệm của f(x) nếu có thì x = , chỉ có f(2) = 0 nên x = 2 là nghiệm của f(x) nên f(x) có một nhân tử là x – 2. Do đó ta tách f(x) thành các nhóm có xuất hiện một nhân tử là x – 2

Cách 1: x3 – x2 – 4 = 

= 

Cách 2: 

= 

***VD14*:** Phân tích đa thức f(x) = 3x3 – 7x2 + 17x – 5 thành nhân tử.

Nhận xét:  không là nghiệm của f(x), như vậy f(x) không có nghiệm nguyên. Nên f(x) nếu có nghiệm thì là nghiệm hữu tỉ

Ta nhận thấy x =  là nghiệm của f(x) do đó f(x) có một nhân tử là 3x – 1. Nên

f(x) = 3x3 – 7x2 + 17x – 5

= 

= 

Vì  với mọi x nên không phân tích được thành nhân tử nữa

***VD15:*** Phân tích đa thức f(x) = x4 + 1997x2 + 1996x + 1997 thành nhân tử.

* Gợi ý:

Tách như sau: x4 + 1997x2 + 1996x + 1997 = x4 -x + 1997x2 + 1997x + 1997

***Giải:*** f(x) = x4 + 1997x2 + 1996x + 1997

= x4 -x + 1997x2 + 1997x + 1997

=x( x3 - 1 ) +1997( x2 + x + 1 )

= x( x - 1 )( x2 + x + 1 ) +1997( x2 + x + 1 )

= ( x2 + x + 1 )( x2 - x +1997 ) .

**\*Phương pháp 6: Thêm (bớt ) hạng tử .**

*Cách làm:*

Phải thêm bớt cùng một hạng tử nào đó để đa thức chuyển về dạng hiệu hai bình phương hoặc áp dụng phương pháp nhóm.

***VD16:*** Phân tích đa thức f(x) = x4 + 4 thành nhân tử.

***Giải:***f(x) = x4 + 4 = (x2)2 + 22 (thêm, bớt 2.x2 .2 =4x2 )

= x4 + 4x2 + 4 – 4x2

= ( x2 + 2 )2 – ( 2x )2

= ( x2 + 2 + 2x ) ( x2 + 2 – 2x ).

*Khai thác bài toán tương tự :* Phân tích đa thức f(x) = x4 + 64y4 thành nhân tử.

***VD17:*** Phân tích đa thức f(x) = x7 + x2 + 1 thành nhân tử.

***Giải:*** Thêm (bớt ) x

x7 + x2 + 1 = (x7 – x) + (x2 + x + 1 ) = x(x6 – 1) + (x2 + x + 1 )

= x(x3 - 1)(x3 + 1) + (x2 + x + 1 ) = x(x – 1)(x2 + x + 1 ) (x3 + 1) + (x2 + x + 1)

= (x2 + x + 1)[x(x – 1)(x3 + 1) + 1] = (x2 + x + 1)(x5 – x4 + x2 - x + 1).

***VD18:*** Phân tích đa thức f(x) = x7 + x5 + 1 thành nhân tử.

*Gợi ý :* Thêm (bớt) x2 và x .

x7 + x5 + 1 = (x7 – x ) + (x5 – x2 ) + (x2 + x + 1)

= x(x3 – 1)(x3 + 1) + x2(x3 – 1) + (x2 + x + 1)

= (x2 + x + 1)(x – 1)(x4 + x) + x2 (x – 1)(x2 + x + 1) + (x2 + x + 1)

= (x2 + x + 1)[(x5 – x4 + x2 – x) + (x3 – x2 ) + 1] = (x2 + x + 1)(x5 – x4 + x3 – x + 1)

**LƯU Ý :**Các đa thức có dạng x3m + 1 + x3n + 2 + 1 như: x4 + x2 + 1 ; x7 + x5 + 1 ; x8 + x4 + 1 ;… đều có nhân tử chung là x2 + x + 1

**\*Phương pháp 7: Đặt biến phụ .**

***VD19:*** Phân tích đa thức  thành nhân tử.

*Gợi ý :* đặt x2 + x = y

***Giải:***  = (x2+x)2 +4(x2 +x) – 12

đặt x2 + x = y đa thức trở thành : y2 + 4y – 12 (cách làm đã hướng dẫn tại VD12)

= y2 + 6y – 2y -12 = y(y + 6) -2(y+6)

= (y+6)(y – 2) = (x2 + x +6)(x2 + x – 2)

= (x2 + x +6)(x – 1)(x + 2).

***VD20:*** Phân tích đa thức x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 thành nhân tử.

***Giải:*** x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 = [x(x + 10)][(x + 4)(x + 6)] + 128

= (x2 + 10x) + (x2 + 10x + 24) + 128

Đặt x2 + 10x + 12 = y, đa thức có dạng

(y – 12)(y + 12) + 128 = y2 – 144 + 128 = y2 – 16 = (y + 4)(y – 4)

= ( x2 + 10x + 8 )(x2 + 10x + 16 ) = (x + 2)(x + 8)( x2 + 10x + 8 ).

***VD21:*** Phân tích đa thức x4 + 6x3 + 7x2 – 6x + 1 thành nhân tử.

***Giải:*** Vì x = 0 không phải là nghiệm của đa thức => 

x4 + 6x3 + 7x2 – 6x + 1 = x2 ( x2 + 6x + 7 – )

= x2 [(x2 + ) + 6(x - ) + 7 ]

Đặt x -  = y thì x2 +  = y2 + 2, do đó

A = x2(y2 + 2 + 6y + 7) = x2(y + 3)2 = (xy + 3x)2 = [x(x - )2 + 3x]2

= (x2 + 3x – 1)2 .

**Chú ý:** Ví dụ trên có thể giải bằng cách áp dụng hằng đẳng thức như sau:

A = x4 + 6x3 + 7x2 – 6x + 1 = x4 + (6x3 – 2x2 ) + (9x2 – 6x + 1 )

= x4 + 2x2(3x – 1) + (3x – 1)2 = (x2 + 3x – 1)2

**\*Phương pháp 8: Phương pháp hệ số bất định .**

***VD21:*** Phân tích đa thức x4 - 6x3 + 12x2 - 14x + 3 thành nhân tử.

Nhận xét: các số 1, 3 không là nghiệm của đa thức, đa thức không có nghiệm nguyên củng không có nghiệm hữu tỉ

Như vậy nếu đa thức phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng

(x2 + ax + b)(x2 + cx + d) = x4 + (a + c)x3 + (ac + b + d)x2 + (ad + bc)x + bd

đồng nhất đa thức này với đa thức đã cho ta có: 

Xét bd = 3 với b, d  Z, b   với b = 3 thì d = 1 hệ điều kiện trên trở thành



Vậy: x4 - 6x3 + 12x2 - 14x + 3 = (x2 - 2x + 3)(x2 - 4x + 1)

***VD22:*** Phân tích đa thức 2x4 - 3x3 - 7x2 + 6x + 8 thành nhân tử.

Nhận xét: đa thức có 1 nghiệm là x = 2 nên có thừa số là x - 2 do đó ta có:

2x4 - 3x3 - 7x2 + 6x + 8 = (x - 2)(2x3 + ax2 + bx + c)

= 2x4 + (a - 4)x3 + (b - 2a)x2 + (c - 2b)x - 2c  

Suy ra: 2x4 - 3x3 - 7x2 + 6x + 8 = (x - 2)(2x3 + x2 - 5x - 4)

Ta lại có 2x3 + x2 - 5x - 4 là đa thức có tổng hệ số của các hạng tử bậc lẻ và bậc chẵn bằng nhau nên có 1 nhân tử là x + 1 nên 2x3 + x2 - 5x - 4 = (x + 1)(2x2 - x - 4)

Vậy: 2x4 - 3x3 - 7x2 + 6x + 8 = (x - 2)(x + 1)(2x2 - x - 4).

**LƯU Ý :** Cách làm này chỉ áp dụng trong trường hợp đa thức bậc 4 không có nghiệm . Trường hợp có nghiệm ta nên phân tích theo cách tách hạng tử để xuất hiện nhân tử chung (xem hướng dẫn ở VD13).